I.D Théorème de Jordan-Chevalley

Théorème 8: Jordan-Chevalley

Soit $k = \mathbb{C}$ et $A = \mathcal{M}_n(k)$. (ou k un corps parfait et A une k-algèbre de dimension finie.
Alors pour tout $a \in A$ il existe un unique couple (s, n) d'éléments de A tels que :
- s est semi-simple
- n est nilpotent
- $sn = ns$
- $a = s + n$

De plus, s et n sont des polynômes en a et μ_s est la partie sans facteur carré de μ_a.

Démonstration.
Unicité :
Si (s, n) et (s', n') sont deux décompositions qui vérifient les conditions, alors :

$$s - s' = n' - n$$

Puis s et s' sont des polynômes en a, ils commutent et s' commute avec u car :

$$s' \circ u = s' \circ (s' + n') = (s')^2 + s' \circ n' = (s')^2 + n' \circ s' = u \circ s'$$

Ainsi, en se plaçant dans un corps de décomposition de μ_u par exemple, on a que s et s' sont tous deux diagonalisables. Ainsi, comme ils commutent ils sont diagonalisables dans une même base et donc $s - s'$ est diagonalisable dans cette même base.
De même, n et n' commutent et donc $n' - n$ est nilpotente. Finalement on a : $s - s' = n' - n$ est diagonalisable et nilpotente. Il s'agit donc de l'endomorphisme nul, ce qui conclut à l'unicité de la décomposition.

Existence :
On montre l'existence par une idée de Chevalley : on va fabriquer s comme racine de $P(x) = 0$ par la méthode de Newton !

Avec P =rad(μ_a) : si $\mu_a = \prod_{i=1}^r P_i^{\alpha_i}$ alors $P = \prod_{i=1}^r P_i$. En caractéristique nulle on peut écrire $P = P_1 \dots P_r = \frac{\mu_a}{\mu_a \wedge \mu_a'}$.

Tous les calculs se font dans $k[a]$.
Commençons par justifier que l'on utilise la méthode de Newton : si $u = s + n$ avec s racine de P et n nilpotent (infinitésimal) alors on est assez proche de la racine s pour converger vers cette racine.

Par construction il existe r (par exemple $r = \max(\alpha_i)$) tel que $\mu_a | P^r$. Donc, $P(a)^r = 0$. On note $\varepsilon = P(a)$. Il s'agit donc d'un élément nilpotent car $P^{\deg(\mu_a)}$ est divisible par μ_a et donc $P^{\deg(\mu_a)}(a) = 0$. Et si x est un élément de l'idéal engendré par ε^n alors on note $x = \mathcal{O}(\varepsilon^n)$. Les facteurs P_i sont à racines simples sur $\bar{k}$ car k est parfait (définitions équivalentes d'un corps parfait).
En particulier, P et P' sont premiers entre eux. On écrit alors une relation de Bézout entre ces deux éléments :

$$UP + VP' = 1$$

et si l'on trouve que s est racine de P, alors on aura :

$$U(s)P(s) + V(s)P'(s) = V(s)P'(s) = 1.$$

Donc $P'(s) \in k[u]^\times$.
On sait déjà que $P'(a) \in k[u]^\times$ car $P | \mu_a | P^{\deg(\mu_a)}$ et on a Bézout entre μ_a et P'.

On introduit maintenant l'algorithme de Newton :

$$\begin{cases} a_0 = a \\ a_{n+1} = a_n - \frac{P(a_n)}{P'(a_n)} = a_n - P'(a_n) \circ P(a_n) \end{cases}$$

où l'on notera bien que le quotient à un sens car $k[u]$ est une k-algèbre commutative.

On montre par récurrence les trois points suivants :
(i) a_n est bien défini
(ii) $P(a_n) = \mathcal{O}\left(\varepsilon^{2^n}\right)$
(iii) $a_n - a = \mathcal{O}(\varepsilon)$

Initialisation : Pour le cas $n = 0$, on a $P(a_0) = P(a) = \varepsilon = \mathcal{O}(\varepsilon)$ et $a_0 - a = 0 = \mathcal{O}(\varepsilon)$.

Hérédité :
1. $P'(a_{n+1}) = P'(a_n - \frac{P(a_n)}{P'(a_n)})$
   Mais $P(X, Y) = P(X) + YP'(X) + Y^2 Q(X, Y)$ par Taylor-Lagrange. Donc :
$$P'(a_{n+1}) = P'(a_n) - \frac{P(a_n)}{P'(a_n)}(\dots)$$
   est par hypothèse de récurrence la somme d'un inversible $(P'(a_n))$ et d'un nilpotent qui commutent. Donc $P'(a_{n+1})$ est inversible.
2. La formule de Taylor-Lagrange donne : $P(a_{n+1}) = P(a_n - \frac{P(a_n)}{P'(a_n)}) = P'(a_n) - \frac{P(a_n)}{P'(a_n)} \times P'(a_n) + \left(-\frac{P(a_n)}{P'(a_n)}\right)^2 Q(a_n, -\frac{P(a_n)}{P'(a_n)})$.
   Les deux premiers termes du membres de droite sont opposés. Donc on obtient $P(a_{n+1}) = \left(-\frac{P(a_n)}{P'(a_n)}\right)^2 Q(a_n, -\frac{P(a_n)}{P'(a_n)})$
   Mais par hypothèse de récurrence, $\frac{P(a_n)}{P'(a_n)} = \mathcal{O}\left(\varepsilon^{2^n}\right)$. Donc $P(a_{n+1}) = \mathcal{O}\left(\varepsilon^{2^{n+1}}\right)$.
3. $$a_{n+1} - a = a_n - a - \frac{P(a_n)}{P'(a_n)} = \mathcal{O}(\varepsilon) + \mathcal{O}\left(\varepsilon^{2^n}\right) = \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Si $n \geqslant \lceil \log_2(\deg(\mu_a)\rceil$ alors on a $\varepsilon^{2^n} = 0$.
Donc l'algorithme stationne à $s = a_\infty = a_n$ qui est dès lors racine de P par le deuxième point de la récurrence. De plus $n := a - s = a - a_\infty = \mathcal{O}(\varepsilon)$ est nilpotent par le troisième point de la récurrence.

Enfin s est annulé par le polynôme P qui est sans facteurs carrés. Donc s est semi-simple.
On a ainsi montrer l'existence d'une décomposition de Jordan-Chevalley. L'unicité est la partie facile mais hors sujet ici. ■

Remarque 9

Cet algorithme est effectif (en caractéristique nulle c'est facile, sinon il y a encore un peu de travail) et il stationne donc converge très vite. De plus il est totalement inutile de connaître les valeurs propres de a pour en effectuer la décomposition, ce qui est une très bonne chose car la détermination algorithmique des valeurs propres est à éviter à tout prix du fait de son coût proéminent.

Remarque 10

Les relations de divisibilité suivantes
$$\mu_s | \mu_a | \mu_s^d \qquad \text{où} \qquad d = \dim_k(A)$$
disent que μ_s et μ_a ont même liste de facteurs irréductibles. On montre ces relations.

Démonstration.
On a d'une part :
$$0 = \mu_a(a) = \mu_a(s + n) = \mu_a(s) + n(\dots)$$
Donc :
$$\mu_a(s) = -n(\dots)$$

or s est diagonalisable sur une clôture algébrique de k et n est nilpotent. Donc $\mu_a(s) = 0$ et donc $\mu_s | \mu_a$
On a d'autre part :

$$0 = \mu_s(s) = \mu_s(a - n) = \mu_s(a) - n(\dots)$$

Donc :

$$\mu_s(a) = n(\dots)$$

or n est nilpotent, donc en élevant à la puissance d on obtient :

$$\mu_s(a)^d = 0.$$

■